

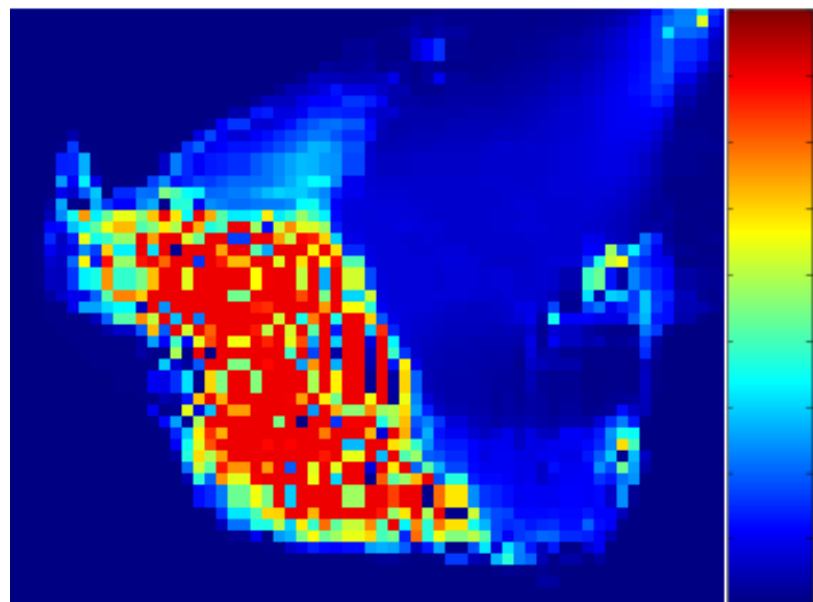


Finite Differenzen Verfahren zur numerischen Lawinensimulation

Michael Szell, 12. Okt. 2007, Wien

[ELBA+]

- Oszillationen
- Abhängigkeit von Gitterauflösung
- Numerisches Verfahren?



Annahmen & Vereinfachungen

- Schema 2-dim, Eulersch
- Flachheit
- Größenabhängigkeit: Großlawinen
- Material: newtonsches Fluid, trocken
- Inkompressibilität
- Isothermalität
- Beliebige Topographien
- Gitter kartesisch, äquidistant
- Kontinuität

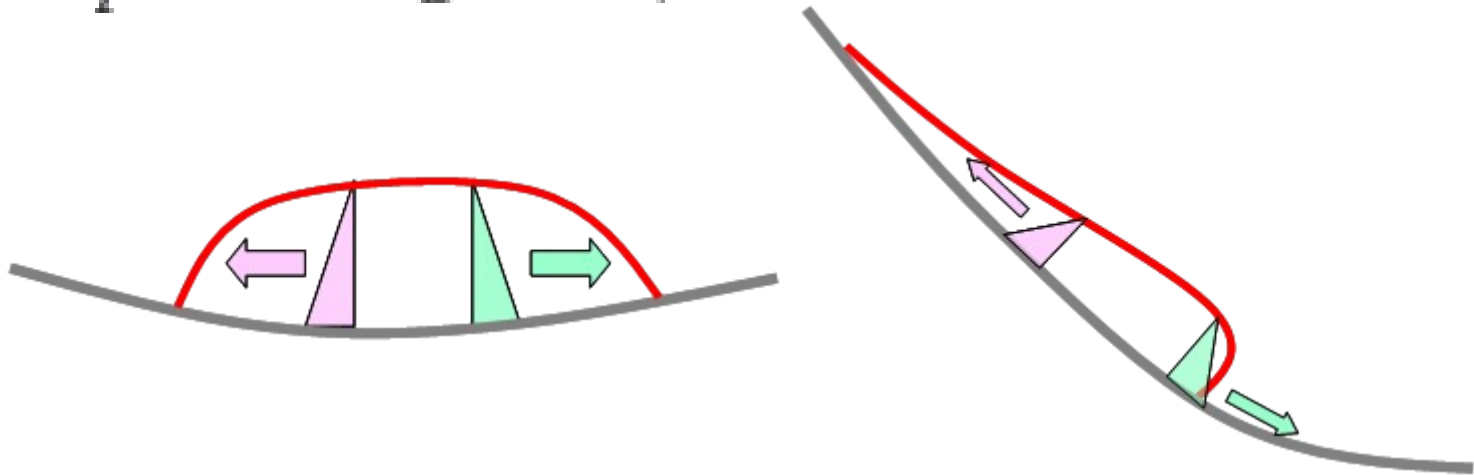
Modellkräfte

- F_g Gravitationskraft
- F_{ph} Hydrostatischer Druck
- F_e Turbulente Reibung
- F_d Trockene Reibung

$$F = \underbrace{F_g + F_{ph}}_{\text{Beschleunigung}} + \underbrace{F_e + F_d}_{\text{Verzögerung}}$$

Gravitationskraft und hydrostatischer Druck

- $F_g = mg \sin \psi$
- $F_{ph} = mg \sin \psi_s$



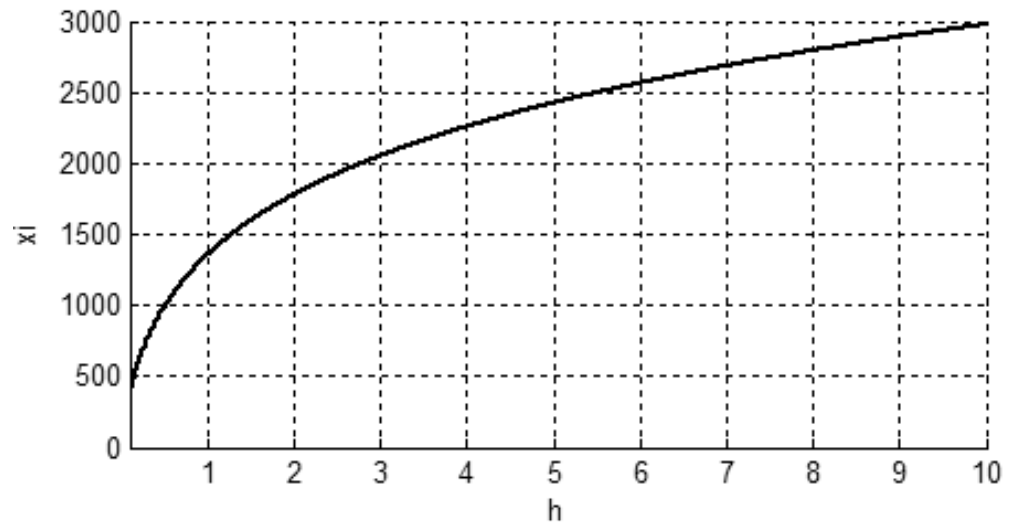
- $F_{g,ph} = mg(\sin \psi + \sin \psi_s)$

Turbulente Reibung

Nach Voellmy (1955) + Keulegan-Relation

$$F_e = mgS_{fe}$$

$$S_{fe} = \frac{v^2}{\xi h}$$

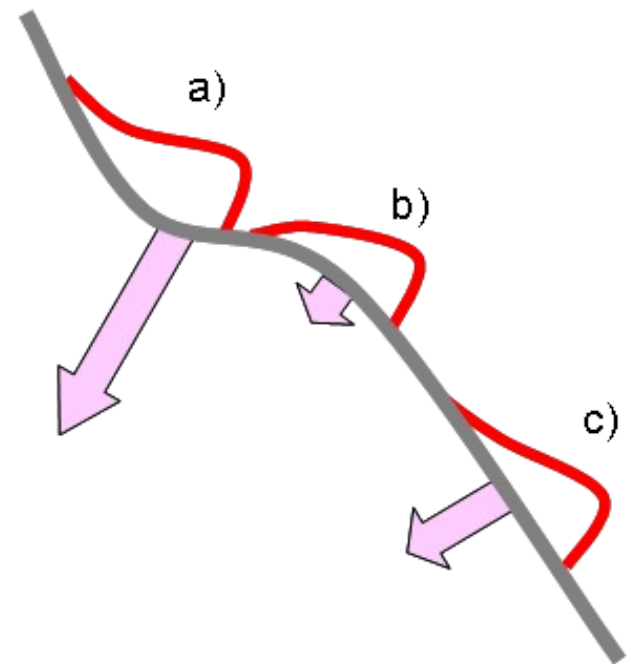


$$\xi = 8g \left(-2 \log_{10} \left(\frac{k_s}{12h} \right) \right)^2$$

Trockene Reibung

Mohr-Coulomb + Zentrifugalbeschleunigung

$$F_d = m\mu \left(\underbrace{g \cos \psi + \frac{v^2}{r}}_{\text{Normalspannung}} \right)$$



[Grundgleichungen]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} &= hg (\sin \psi \sin \phi + \sin \psi_s \cos \phi_s) \\ &\quad - \frac{u}{\|\mathbf{v}\|} \left[h\mu \left(g \cos \psi + \frac{u^2}{q} + \frac{v^2}{r} \right) + \frac{u^2 + v^2}{32 \log_{10}^2 \left(\frac{k_s}{12h} \right)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} &= hg (-\sin \psi \cos \phi + \sin \psi_s \sin \phi_s) \\ &\quad - \frac{v}{\|\mathbf{v}\|} \left[h\mu \left(g \cos \psi + \frac{u^2}{q} + \frac{v^2}{r} \right) + \frac{u^2 + v^2}{32 \log_{10}^2 \left(\frac{k_s}{12h} \right)} \right] \end{aligned}$$

Berechnungsschema ELBA+

- Schnell
- Überschätzte Geschwindigkeit
- Oszillationen
- Abhängigkeit von Gitterauflösung
- „Sehr diskret“

→ Neuimplementierung!

Motivation der Verfahrensart

Explizites Finite Differenzen Verfahren

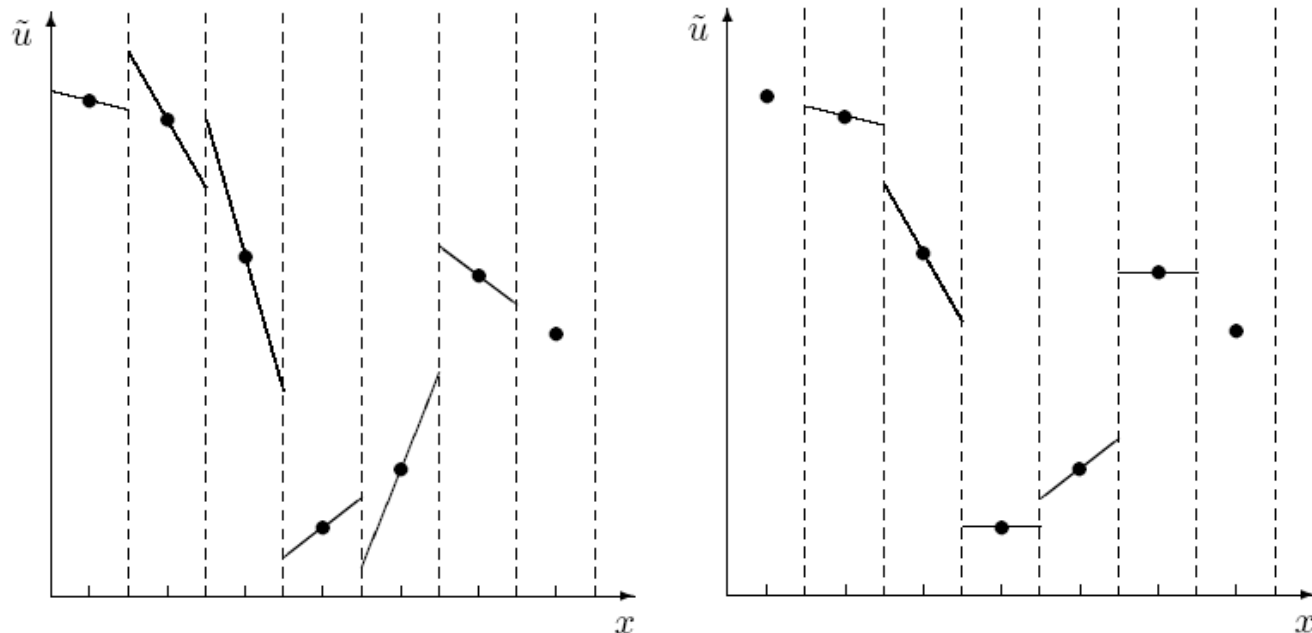
- Vorgabe: Gitter, schnell, einfach
- Literatur: zeitabhängig
- Auflösung, CFL

TVD Methoden

- Total Variation Diminishing (Harten 1983)

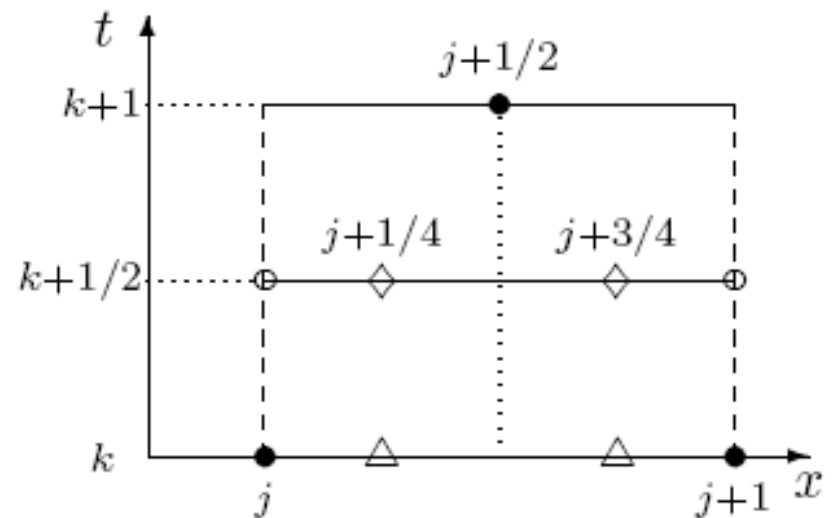
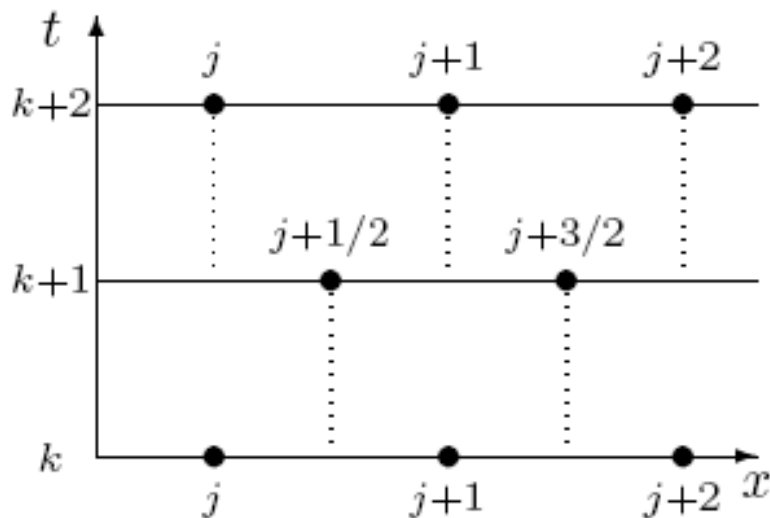
$$TV(u) = \sum_i |u_{i+1} - u_i| \quad \forall k : TV(u^{k+1}) \leq TV(u^k)$$

- Limiter begrenzen Gradienten

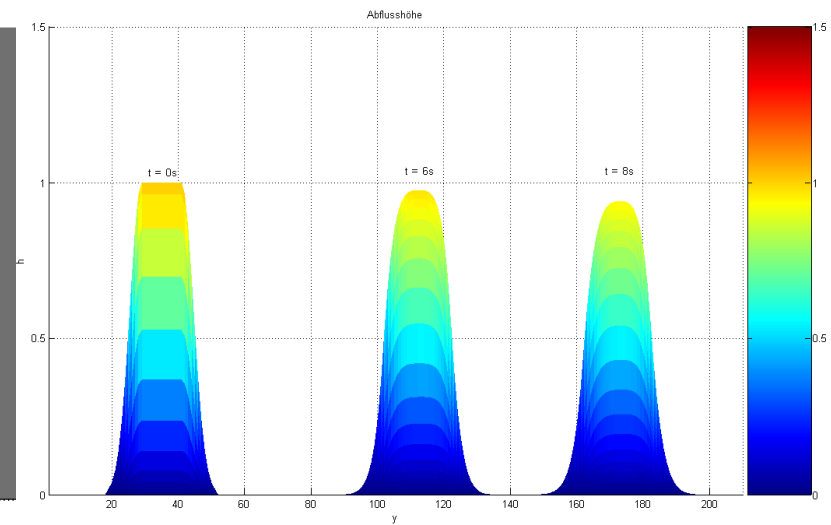
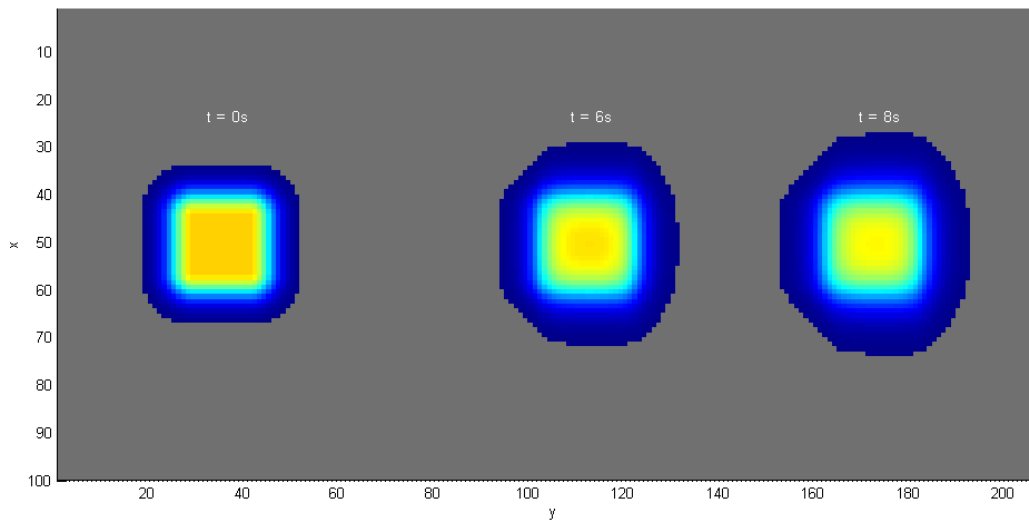
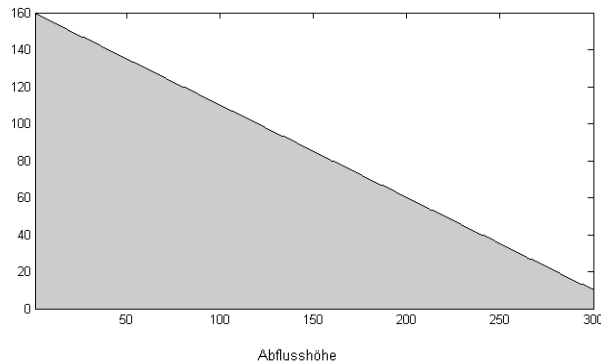


NOC Schema

- Non-Oscillatory Central (Nessyahu, Tadmor 1990)
- Staggered Grid, 2-Schritt Verfahren

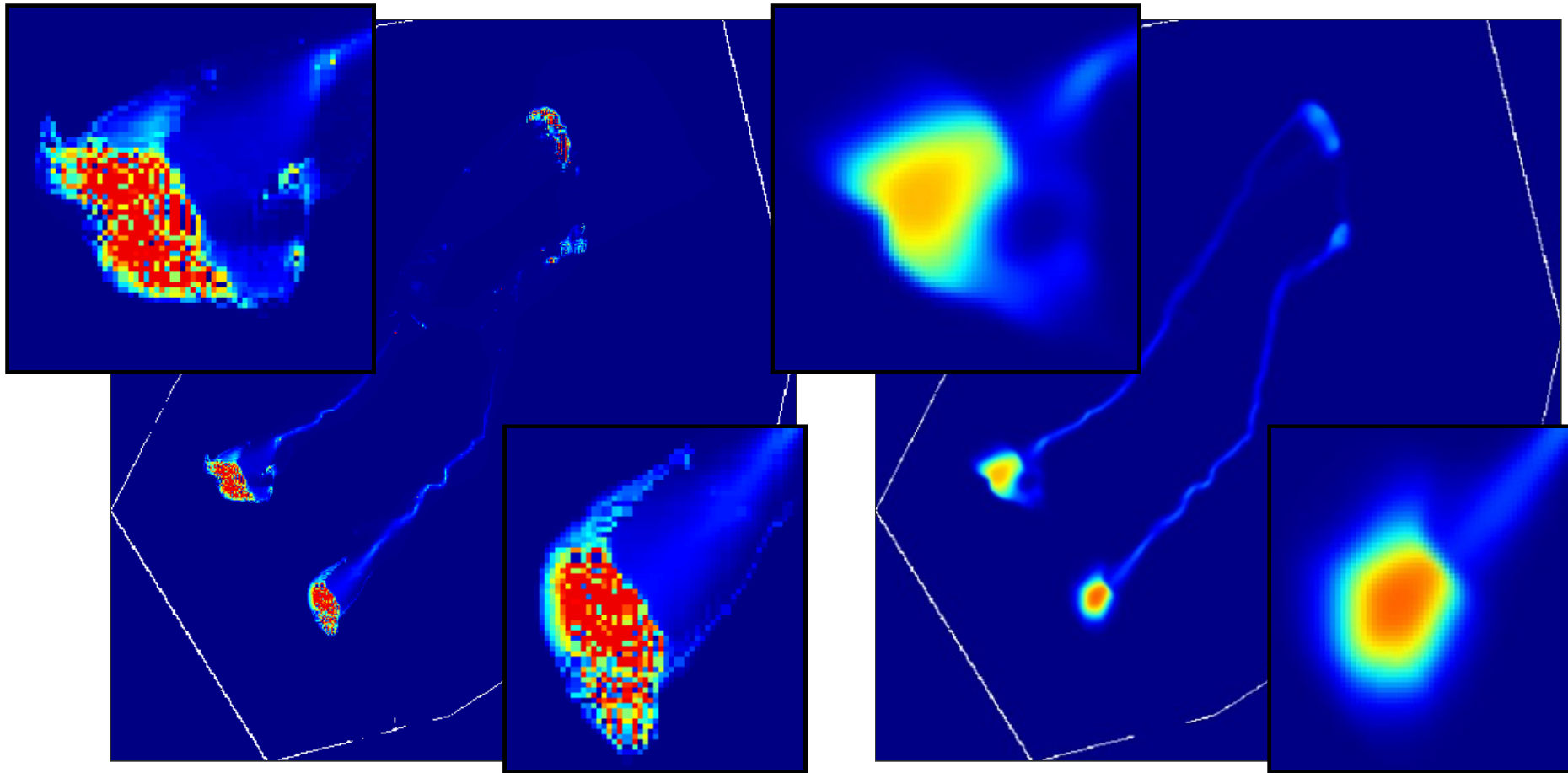


2-Dim numerische Experimente



(konstant geneigter Hang, nur Gravitationskraft)

Alt (ELBA+) vs. Neu (NOC)



Danke für die Aufmerksamkeit!